Uma função de Lyapunov para equações degeneradas não lineares

Ester Beatriz de Souza dos Santos (Bolsista PIBIC pelo CNPq)

Orientador: Phillipo Lappicy

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Universidade de São Paulo

esterbiaeb@usp.br

Objetivos

As funções de Lyapunov, ou energia, ocorrem em sistemas físicos que naturalmente perdem energia, como por exemplo certos sistemas dinâmicos dissipativos. Matematicamente, tais funções são usadas para provar a estabilidade de pontos de equilíbrio. Para algumas classes de EDPs, sabe-se da existência de uma função de Lyapunov, e em casos bastante particulares, sabe-se da forma específica de tal energia. Este é o caso da equação do ρ-Laplaciano,

$$u_t = (\rho - 1)|u_x|^{\rho-2}u_{xx} + f(u), \tag{1}$$

onde $\rho \in \mathbb{N}$ e $\rho > 2$, que possui função de Lyapunov dada por:

$$E = \int_0^1 \frac{|u_x|^\rho}{\rho} - \int_0^u f(u_1)du_1 \; dx. \tag{2}$$

Nesse contexto, a minha palestra consiste em apresentar um método de construção de funções de Lyapunov para equações parabólicas degeneradas não-lineares:

$$f(x, u, u_x, u_{xx}, u_t) = f(x, u, p, q, r) = 0, \tag{3}$$

onde $f \in C^2$, $f_q f_r \leqslant 0$, $f_r \neq 0$, $f_q(x, u, p, 0, 0) \not\equiv 0$.

Métodos e Procedimentos

Sabendo que dada uma equação diferencial, como em (3), uma função de Lyapunov E, é uma função não negativa de forma que:

$$\frac{dE}{dt}(u(x,t)) \leq 0, \tag{4}$$

ao longo da solução $u(x, t)$ da equação (3). Utilizamos como base para a construção de tal função, os métodos apresentados por H. Matano, para equações quase lineares, e por B. Fiedler e P. Lappicy, para equações completamente não lineares. Para isso, primeiro reescrevemos (3):

$$f_q(x, u, p, 0, 0)u_{xx} = F^0(x, u, p) + F^1(x, u, p, q, r), \tag{5}$$

onde,

$$F(x, u, p, q, r) := -f(x, u, p, q, r) + f_q(x, u, p, 0, 0)u_{xx}, \tag{6}$$

e então,

$$\begin{aligned} F^0(x, u, p) &:= F(x, u, p, 0, 0), \\ F^1(x, u, p, q, r) &:= F(x, u, p, q, r) - F^0(x, u, p), \end{aligned} \tag{7}$$

no qual, $F^1_r > 0$ e $f_q(x, u, p, 0, 0) \geq F^1_q(x, u, p, q, r)$. Buscamos encontrar uma função $L(x, u, p)$, tal que,

$$E = \int_0^1 L(x, u, p) \; dx, \tag{8}$$

que por sua vez é encontrada através de uma função $g(x, u, p)$ no qual:

$$L_{pp} = f_q(x, u, p, 0, 0) \cdot exp(g(x, u, p)). \tag{9}$$

Conseguimos comprovar a existência de g pelo método das características, dessa forma também provamos a existência de $L(x, u, p)$, que é recuperada a partir da integração dupla de (9). Com isso, conseguimos obter o que queríamos:

$$\frac{dE}{dt} = -\int_0^1 exp(g)F^1 u_t \; dx \leqslant 0. \tag{10}$$

Resultados

Por fim, caso exista uma solução g das equações características, temos uma função de Lyapunov para (3). Tal método nos permite calcular explicitamente as funções de Lyapunov para algumas generalizações da equação (1), como por exemplo:

$$u_t = (\rho - 1)|u_x|^{\rho-2}u_{xx} + {u_x}^n, \tag{11}$$

com $n \in \mathbb{R}$. Usando nosso método, obtemos a seguinte função de energia:

$$E = k_* \int_0^1 \frac{(\rho - 1)|u_x|^{\rho - n}}{(\rho - n)(\rho - (n+1))} - u \; dx, \qquad (12)$$

onde $k_* \in \mathbb{R}$ é uma constante.

Conclusões

Com a adptação do método introduzido pelo H. Matano, ampliamos o escopo de equações que admitem uma função de Lyapunov. Vale destacar que tal método não é válido para todas as equações degeneradas, já que depende que o sistema de EDOs obtido pelo método das características possua solução, e além disso, as equações precisam obedecer as restrições, o que não ocorre, por exemplo, na equação de Trudinger :

$$(u^\alpha)_t = u_{xx}, \qquad (13)$$

onde $\alpha > 0$, note que, neste caso $f_r = 0$.

Referências Bibliográficas

MATANO, Hiroshi, *Asymptotic behavior of solutions of semilinear heat equations on* S^1, Nonlinear Diffusion Equations and Their Equilibrium States II, 1988.

LAPPICY, Phillipo and FIEDLER, Bernold, *A Lyapunov function for fully nonlinear parabolic equations in one spatial variable*, São Paulo J. Math. Sci. 2019.

LAPPICY, Phillipo and BEATRIZ, Ester, *An energy formula for fully nonlinear degenerate parabolic equations in one dimension*, Em preparação, 2021